Chapitre 13

Thermodynamique des milieux continus

13.1 Dérivée temporelle du volume

Établir la dérivée temporelle du volume $\dot{V}(t)$ d'un milieu continu en le divisant en boîtes cubiques infinitésimales et déformables centrées autour de points écrits en coordonnées cartésiennes comme (x, y, z). Les coordonnées cartésiennes $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ des centres des boîtes infinitésimales sont implicitement des fonctions du temps t car ils peuvent se déplacer lors de la déformation du milieu continu. La variation de volume du milieu continu est la somme des variations de volume des boîtes. Ces boîtes ont des faces carrées orthogonales aux axes de coordonnées cartésiennes et les dimensions de leurs arrêtes sont dx, dy et dz. Le champ de vitesse est $\boldsymbol{v}(x, y, z)$.

13.1 Solution

Le champ vectoriel vitesse au centre d'une boîte infinitésimale est représenté en coordonnées cartésiennes comme,

$$\boldsymbol{v}(x, y, z) = \Big(v_x(x, y, z), v_y(x, y, z), v_z(x, y, z) \Big)$$

D'abord, on considère les faces d'une boîte cubique qui sont orthogonales à l'axe x. Le déplacement de la face d'aire infinitésimale $dy\,dz$ située en position $x - dx/2$ est déterminé par la vitesse $v_x(x - dx/2, y, z)$ et le décplacement de la face d'aire infinitésimale $dy\,dz$ située en position $x + dx/2$ est déterminé par la vitesse $v_x(x + dx/2, y, z)$. La variation infinitésimale du volume dV_x de la boîte durant un intervalle de temps infinitésimal dt est due au déplacement des deux faces. Ainsi, la variation infinitésimale du volume s'écrit,

$$dV_x(x, y, z) = v_x\left(x + \frac{dx}{2}, y, z\right) dy\,dz\,dt - v_x\left(x - \frac{dx}{2}, y, z\right) dy\,dz\,dt$$

Les signes dans le membre de droite de cette équation sont dus au fait que la vitesse $v_x(x + dx/2, y, z)$ de la face avec une coordonnée d'abscisse x maximale est positive et la vitesse $v_x(x - dx/2, y, z)$ avec une coordonnée d'abscisse x

minimale est négative pour un accroissement du volume de la boîte. Les développements limités au premier ordre des vitesses $v_x\left(x \pm dx/2, y, z\right)$ sont donnés par,

$$v_x\left(x \pm \frac{dx}{2}, y, z\right) = v_x\left(x, y, z\right) \pm \frac{1}{2}\,\frac{\partial v_x\left(x, y, z\right)}{\partial x}\,dx$$

Compte tenu de ce résultat, l'expression pour la variation infinitésimale du volume devient,

$$\begin{aligned} dV_x\left(x, y, z\right) = &\left(v_x\left(x, y, z\right) + \frac{1}{2}\,\frac{\partial v_x\left(x, y, z\right)}{\partial x}\,dx\right) dy\,dz\,dt \\ &- \left(v_x\left(x, y, z\right) - \frac{1}{2}\,\frac{\partial v_x\left(x, y, z\right)}{\partial x}\,dx\right) dy\,dz\,dt \end{aligned}$$

et se réduit à,

$$dV_x\left(x, y, z\right) = \frac{\partial v_x\left(x, y, z\right)}{\partial x}\,dx\,dy\,dz\,dt$$

De manière similaire, la variation infinitésimale du volume dV_y de la boîte durant un intervalle de temps infinitésimal dt, due au déplacement des faces d'aire infinitésimale $dz\,dx$ situées en position $y + dy/2$ et $y - dy/2$, s'écrit,

$$dV_y\left(x, y, z\right) = \frac{\partial v_y\left(x, y, z\right)}{\partial y}\,dx\,dy\,dz\,dt$$

et la variation infinitésimale du volume dV_z de la boîte durant un intervalle de temps infinitésimal dt, due au déplacement des faces d'aire infinitésimale $dx\,dy$ situées en position $z + dz/2$ et $z - dz/2$, s'écrit,

$$dV_z\left(x, y, z\right) = \frac{\partial v_z\left(x, y, z\right)}{\partial z}\,dx\,dy\,dz\,dt$$

La variation infinitésimale du volume de la boîte s'écrit,

$$\begin{aligned} dV\left(x, y, z\right) &= dV_x\left(x, y, z\right) + dV_y\left(x, y, z\right) + dV_z\left(x, y, z\right) \\ &= \left(\frac{\partial v_x\left(x, y, z\right)}{\partial x} + \frac{\partial v_y\left(x, y, z\right)}{\partial y} + \frac{\partial v_z\left(x, y, z\right)}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz\,dt \end{aligned}$$

Compte tenu de la divergence du champ de vitesse,

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}\left(x, y, z\right) = \frac{\partial v_x\left(x, y, z\right)}{\partial x} + \frac{\partial v_y\left(x, y, z\right)}{\partial y} + \frac{\partial v_z\left(x, y, z\right)}{\partial z}$$

la variation infinitésimale du volume de la boîte devient,

$$dV\left(x, y, z\right) = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}\left(x, y, z\right) dx\,dy\,dz\,dt$$

La dérivée temporelle du volume du milieu continu est l'intégrale sur le volume du système de la divergence de la vitesse,

$$\dot{V}\left(x, y, z\right) = \int_{V(t)} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}\left(x, y, z\right) dx\,dy\,dz$$

13.2 Viscosité volumique et loi de Stokes

★★★★ Le frottement scalaire interne τ est lié à la viscosité volumique η par la loi de Stokes,

$$\tau = \eta\, \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}$$

1) Expliquer pourquoi le frottement scalaire interne peut s'écrire,

$$\tau = p - p_{\text{ext}}$$

2) Compte tenu de la loi de Stokes (3.52) obtenue au chapitre 3,

$$\dot{V} = \frac{1}{\xi}\,(p - p_{\text{ext}})$$

exprimer le coefficient de frottement thermoélastique ξ en termes de la viscosité volumique η.

13.2 Solution

1) Au chapitre 3, on a montré que l'irréversibilité liée au mouvement d'une paroi séparant deux sous-systèmes est due à leur différence de pression. Étant donné que le frottement interne τ a la même dimension que la pression p, le frottement mécanique scalaire τ entre un système et l'environnement doit être la différence de pression $p - p_{\text{ext}}$ entre le système et l'environnement à une constante près qui peut être choisie comme l'unité sans perte de généralité.
2) L'intégration du frottement scalaire sur le volume du système s'écrit,

$$\tau \int_V dV = (p - p_{\text{ext}}) \int_V dV = \eta \int_V dV\, \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}$$

Compte tenu de la définition (11.102) de la dérivée temporelle du volume,

$$\dot{V} = \int_V dV\, \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}\right)$$

la loi de Stokes est écrite de la manière suivante,

$$\dot{V} = \frac{V}{\eta}\,(p - p_{\text{ext}})$$

Par conséquent, le coefficient de frottement thermoélastique est la viscosité volumique par unité de volume,

$$\xi = \frac{\eta}{V}$$

13.3 Equation de continuité de la masse

Établir l'équation de continuité pour la masse en déterminant la variation de masse à l'intérieur d'une boîte cubique infinitésimale située centrée au point (x, y, z). La boîte a des faces carrées orthogonales aux axes de coordonnées cartésiennes et les dimensions de ses arêtes sont dx, dy et dz. Le champ de vitesse est $\boldsymbol{v}\,(x, y, z)$.

13.3 Solution

Le champ vectoriel vitesse au centre d'une boîte infinitésimale est représenté en coordonnées cartésiennes comme,

$$\boldsymbol{v}\,(x, y, z) = \Big(v_x\,(x, y, z)\,, v_y\,(x, y, z)\,, v_z\,(x, y, z)\Big)$$

D'abord, on considère les faces d'une boîte cubique qui sont orthogonales à l'axe x. Le débit de masse à travers la face située en position $x - dx/2$ est déterminé par la vitesse $v_x\,(x - dx/2, y, z)$ et le débit de masse à travers la face située en position $x + dx/2$ est déterminé par la vitesse $v_x\,(x + dx/2, y, z)$. La variation infinitésimale de la masse dM_x à l'intérieur de la boîte durant un intervalle de temps infinitésimal dt est due au débit de masse à travers ces deux faces. Ainsi, la variation infinitésimale de masse s'écrit,

$$\begin{aligned} dM_x\,(x, y, z) = {} & m\left(x - \frac{dx}{2}, y, z\right) v_x\left(x - \frac{dx}{2}, y, z\right) dy\,dz\,dt \\ & - m\left(x + \frac{dx}{2}, y, z\right) v_x\left(x + \frac{dx}{2}, y, z\right) dy\,dz\,dt \end{aligned}$$

où $m\,(x, y, z)$ est la densité de masse. Les signes dans le membre de droite de cette équation sont dus au fait que la vitesse $v_x\,(x - dx/2, y, z)$ est positive pour un débit entrant de masse et que la vitesse $v_x\,(x + dx/2, y, z)$ est positive pour un débit sortant de masse. Les développements limités au premier ordre des densités de masse $m\,(x \pm dx/2, y, z)$ et des vitesses $v_x\,(x \pm dx/2, y, z)$ sont donnés par,

$$\begin{aligned} m\left(x \pm \frac{dx}{2}, y, z\right) &= m\,(x, y, z) \pm \frac{1}{2}\,\partial_x\, m\,(x, y, z)\;dx \\ v_x\left(x \pm \frac{dx}{2}, y, z\right) &= v_x\,(x, y, z) \pm \frac{1}{2}\,\partial_x\, v_x\,(x, y, z)\;dx \end{aligned}$$

Compte tenu de ce résultat, l'expression pour la variation infinitésimale de masse devient,

$$\begin{aligned} & dM_x\,(x, y, z) = \\ & \left(m\,(x, y, z) - \frac{1}{2}\,\frac{\partial m\,(x, y, z)}{\partial x}\,dx\right)\left(v_x\,(x, y, z) - \frac{1}{2}\,\frac{\partial v_x\,(x, y, z)}{\partial x}\,dx\right) dy\,dz\,dt \\ & - \left(m\,(x, y, z) + \frac{1}{2}\,\frac{\partial m\,(x, y, z)}{\partial x}\,dx\right)\left(v_x\,(x, y, z) + \frac{1}{2}\,\frac{\partial v_x\,(x, y, z)}{\partial x}\,dx\right) dy\,dz\,dt \end{aligned}$$

et se réduit à,

$$\begin{aligned} dM_x\,(x,y,z) = &-\left(v_x\,(x,y,z)\;\frac{\partial m\,(x,y,z)}{\partial x}\right) dx\,dy\,dz\,dt \\ &+\left(m\,(x,y,z)\;\frac{\partial v_x\,(x,y,z)}{\partial x}\right) dx\,dy\,dz\,dt \end{aligned}$$

De manière similaire, la variation infinitésimale de masse $dM_y\,(x,y,z)$ à l'intérieur de la boîte durant un intervalle de temps infinitésimal dt, dû au débit de masse à travers les deux faces orthogonales à l'axe y, est donnée par,

$$\begin{aligned} dM_y\,(x,y,z) = &-\left(v_y\,(x,y,z)\;\frac{\partial m\,(x,y,z)}{\partial y}\right) dx\,dy\,dz\,dt \\ &+\left(m\,(x,y,z)\;\frac{\partial v_y\,(x,y,z)}{\partial y}\right) dx\,dy\,dz\,dt \end{aligned}$$

et la variation infinitésimale de masse $dM_z\,(x,y,z)$ à l'intérieur de la boîte durant un intervalle de temps infinitésimal dt, dû au débit de masse à travers les deux faces orthogonales à l'axe z, s'écrit,

$$\begin{aligned} dM_z\,(x,y,z) = &-\left(v_z\,(x,y,z)\;\frac{\partial m\,(x,y,z)}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz\,dt \\ &+\left(m\,(x,y,z)\;\frac{\partial v_z\,(x,y,z)}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz\,dt \end{aligned}$$

La dérivée partielle de la densité de masse par rapport au temps est définie comme,

$$\frac{\partial m\,(x,y,z)}{\partial t} = \frac{dM_x\,(x,y,z) + dM_y\,(x,y,z) + dM_z\,(x,y,z)}{dx\,dy\,dz\,dt}$$

ce qui implique que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial m\,(x,y,z)}{\partial t} = &-\left(v_x\,(x,y,z)\,\frac{\partial}{\partial x} + v_y\,(x,y,z)\,\frac{\partial}{\partial y} + v_z\,(x,y,z)\,\frac{\partial}{\partial z}\right) m\,(x,y,z) \\ &-\; m\,(x,y,z)\left(\frac{\partial v_x\,(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial v_y\,(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial v_z\,(x,y,z)}{\partial z}\right) \end{aligned}$$

ou en notation allégée,

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -\left(v_x\,\frac{\partial}{\partial x} + v_y\,\frac{\partial}{\partial y} + v_z\,\frac{\partial}{\partial z}\right) m \;-\; m\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)$$

À l'aide des relations vectorielles,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla} &= v_x\,\frac{\partial}{\partial x} + v_y\,\frac{\partial}{\partial y} + v_z\,\frac{\partial}{\partial z} \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned}$$

la dérivée partielle de la densité de masse par rapport au temps est mise sous la forme suivante,

$$\frac{\partial m}{\partial t} = - \left(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla}\right) m - \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}\right) m$$

Ainsi, on obtient l'équation de continuité pour la masse,

$$\partial_t \, m + \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(m \, \boldsymbol{v}\right) = 0$$

13.4 Fluide dans un récipient accéléré

☆☆☆☆ Un récipient avec des parois verticales et une base rectangulaire est soumis à une accélération constante $\boldsymbol{a}$ orientée vers la droite. On suppose que le liquide de densité de masse m à l'intérieur du récipient est à l'équilibre par rapport au récipient et que les frottement sont négligeables.

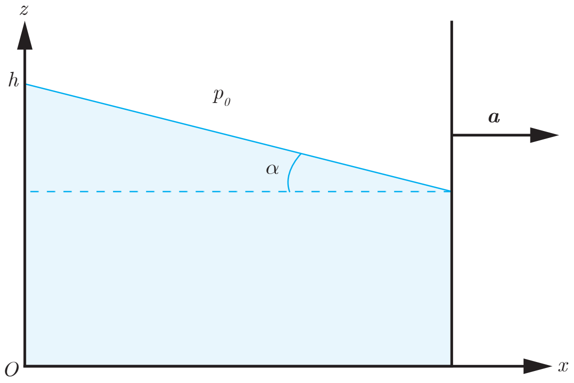

Fig. 13.1 Un récipient rempli de liquide est soumis à une accélération constante. Dans un état stationnaire, la surface de l'eau est inclinée vers l'arrière avec un angle d'inclinaison constant α.

1) Déterminer la pression dans le liquide comme fonction de la coordonnée horizontale x et de la coordonnée verticale z.
2) Montrer que la surface du liquide est inclinée vers l'arrière avec un angle d'inclinaison constant α (fig. 13.1). Déterminer l'angle α.

13.4 Solution

1) En absence de frottement visqueux, la seule densité de force extérieure exercée sur un volume infinitésimal de liquide est son poids spécifique,

$$\sum \boldsymbol{f}^{\,\text{ext}} = m \, \boldsymbol{g}$$

Étant donné qu'il n'y a pas de cisaillement et de frottement, c'est-à-dire que $\tau = 0$, d'après l'équation (11.93), la divergence du tenseur des contraintes se réduit à l'opposé du gradient de pression,

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau} = -\,\boldsymbol{\nabla}\,p$$

Ainsi, la 2e loi de Newton (11.42) peut être mise sous la forme,

$$\boldsymbol{\nabla}\,p = -\,m\,\boldsymbol{a} + m\,\boldsymbol{g}$$

Le gradient de pression $\boldsymbol{\nabla}\,p$ est exprimé en coordonnées cartésiennes comme,

$$\boldsymbol{\nabla}\,p = \frac{\partial p}{\partial x}\,\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial p}{\partial z}\,\hat{\boldsymbol{z}}$$

L'accélération $\boldsymbol{a}$ et le champ gravitationnel $\boldsymbol{g}$ s'écrivent,

$$\boldsymbol{a} = a\,\hat{\boldsymbol{x}} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{g} = -\,g\,\hat{\boldsymbol{z}}$$

ce qui implique que,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\,m\,a \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\,m\,g$$

La différentielle de la pression peut être mise sous la forme,

$$dp\,(x,z) = \frac{\partial p}{\partial x}\,dx + \frac{\partial p}{\partial z}\,dz = -\,m\,a\,dx - \,m\,g\,dz$$

La pression $p\,(x,z)$ est obtenue par intégration sur les coordonnées spatiales x et z,

$$p\,(x,z) = -\,m\,a\,x - \,m\,g\,z + p\,(0,0)$$

où la constante d'intégration $p\,(0,0)$ correspond à la pression à l'origine O du référentiel. La pression $p\,(0,0)$ est la somme de la pression atmosphérique p_0 et de la pression hydrostatique d'une colonne de liquide $m\,g\,h$,

$$p\,(0,0) = p_0 + m\,g\,h$$

Ainsi, la pression au point (x,z) à l'intérieur du liquide s'écrit,

$$p\,(x,z) = -\,m\,a\,x - \,m\,g\,z + p_0 + m\,g\,h$$

2) L'équation précédente peut être mise sous la forme,

$$z = -\,\frac{a}{g}\,x + h - \,\frac{p - p_0}{m\,g}$$

À la surface du liquide, la pression est simplement la pression atmosphérique, c'est-à-dire $p = p_0$. Ainsi, la relation précédente se réduit à,

$$z = -\,\frac{a}{g}\,x + h \qquad \text{(à la surface)}$$

ce qui correspond à une droite avec une pente négative étant donné que a, g et h sont des constantes positives. Ainsi, l'angle d'inclinaison α est déterminé en calculant le rapport des coordonnées,

$$\tan\alpha = -\,\frac{z}{x} = \frac{a}{g} \qquad \text{ainsi} \qquad \alpha = \arctan\left(\frac{a}{g}\right)$$